**Exercice 4** **5 points**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{4}x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan.

**Partie A**

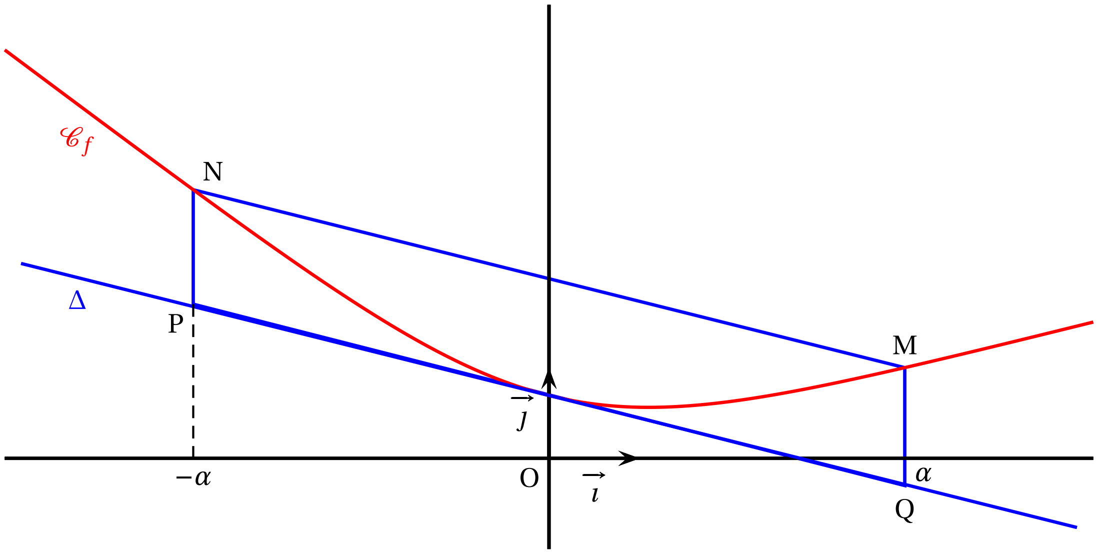
1. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
2. On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.
   - **a.** Montrer que, pour tout réel $x$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 3}{4\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)}$.
   - **b.** En déduire les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
   - **c.** Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[2\,;\,5]$.

**Partie B**

On admettra que la fonction $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$,

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)^2}.$$

On note $\Delta$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ la tangente $\Delta$ et le quadrilatère MNPQ tel que M et N sont les deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives $\alpha$ et $-\alpha$, et Q et P sont les deux points de la droite $\Delta$ d'abscisses respectives $\alpha$ et $-\alpha$.




**1.** **a.** Justifier le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

**b.** En déduire que la portion de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-\alpha~;~\alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère MNPQ.

**2.** **a.** Montrer que $f(-\alpha) = \ln\left(\mathrm{e}^{-\alpha} + 1\right) + \dfrac{3}{4}\alpha$.

**b.** Démontrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.